

УДК 517.927+517.984

О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств

А. А. Владимиров

Аннотация: Изучается вопрос о точной априорной мажоранте наименьшего собственного значения задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} -y'' + qy &= \lambda y, \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

с ограничением на потенциал вида $\int_0^1 r q^\gamma dx \leq 1$, где вес $r \in C(0,1)$ равномерно положителен внутри интервала $(0,1)$. Дается конструктивное доказательство достижимости указанной мажоранты для всех $\gamma > 1$, а при некотором естественном расширении класса допустимых потенциалов — и для $\gamma = 1$.

§ 1. Введение

1. Зафиксируем весовую функцию $r \in C(0,1)$, равномерно положительную внутри интервала $(0,1)$, и рассмотрим спектральную граничную задачу

$$\begin{aligned} (1) \quad & -y'' + qy = \lambda y, \\ (2) \quad & y(0) = y(1) = 0, \end{aligned}$$

где потенциал принадлежит классу

$$(3) \quad A_{r,\gamma} = \left\{ q \in L_{1,loc}(0,1) : (q \geq 0) \ \& \ \left(\int_0^1 r q^\gamma dx \leq 1 \right) \right\},$$

отвечающему некоторому значению $\gamma \geq 1$. Целью настоящей статьи является изучение вопроса о точной априорной мажоранте $M_{r,\gamma} = \sup_{q \in A_{r,\gamma}} \lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения $\lambda_0(q)$ задачи (1)–(2), а также о характере достижимости этой мажоранты внутри класса $A_{r,\gamma}$ или некоторого его естественного расширения.

2. Применительно к ряду конкретных весов поставленная выше задача рассматривалась и ранее. Так, для случая $r(x) \equiv 1$ и $\gamma = 1$ соответствующий результат без доказательства сформулирован уже в работе [1]. Полный разбор задачи с весом $r(x) \equiv 1$ дан в работах [2, 3]. Более общий случай веса вида $r(x) \equiv x^\alpha \cdot (1-x)^\beta$ рассматривался, в частности, в работах [4, 5].

Подход, применённый в работах [3, 4, 5], допускает перенесение и на случай произвольного веса. Он, однако, существенным образом опирается на теорему выбора, и поэтому неприемлем с точки зрения конструктивного направления в математике [6]. Та же

теорема использована и в работе [2]. Подход последней работы, однако, допускает ряд уточнений, позволяющих сделать доказательство полностью конструктивным. Именно это и осуществляется в настоящей статье. Стремление к конструктивности проводимых рассуждений обуславливает также характер приводимых доказательств ряда вспомогательных предложений (например, § 2.4.1).

Методологическую основу излагаемых далее результатов, как и результатов работы [7], составляет теория операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-обобщёнными функциями [8].

3. Поясняющие изложение ссылки на разделы настоящей статьи далее приводятся в тексте в прямых скобках. При этом если ссылка даётся на раздел текущего пункта (либо параграфа), то указание на номер этого пункта (либо параграфа) опускается.

Все функциональные пространства далее предполагаются вещественными.

§ 2. Предварительные утверждения

1. Далее мы будем рассматривать множество обобщённых функций $\overset{\circ}{W}_{2,loc}^{-1}(0,1)$ в качестве пространства Фреше с отвечающими всевозможным натуральным значениям $\ell \geq 2$ полунормами

$$(1) \quad \|q\|_\ell \Rightarrow \sup_{\substack{y \in \overset{\circ}{W}_2^1(2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}) \\ \|y'\|_{L_2[0,1]} \leq 1}} \langle q, y \rangle.$$

Множество *неотрицательных* обобщённых функций класса $\overset{\circ}{W}_{2,loc}^{-1}(0,1)$ мы далее будем обозначать символом \mathfrak{P} . С каждой обобщённой функцией $q \in \mathfrak{P}$ может быть связано гильбертово пространство \mathfrak{D}_q , получаемое пополнением семейства $C_0^1(0,1)$ относительно скалярного произведения

$$(2) \quad \langle y, z \rangle_{\mathfrak{D}_q} \Rightarrow \int_0^1 y' z' dx + \langle q, yz \rangle.$$

1.1. При любом выборе потенциала $q \in \mathfrak{P}$, значения $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и функции $y \in \mathfrak{D}_q$, ортогональной подпространству $\overset{\circ}{W}_2^1(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, справедливо неравенство

$$\|y\|_{L_2[0,1]} \leq \sqrt{\varepsilon} \|y\|_{\mathfrak{D}_q}.$$

Доказательство. Зафиксируем неубывающую функцию $Q \in L_{2,loc}(0,1)$ со свойством

$$(3) \quad (\forall z \in C_0^1(0,1)) \quad \langle q, z \rangle = - \int_0^1 Q z' dx.$$

Независимо от выбора функции $z \in \overset{\circ}{W}_2^1(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ выполняется равенство

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} [y' - Qy] z' dx = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} Qy' z dx, \quad [(2), (3)]$$

что означает подчинение функции y на интервале $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ уравнению

$$(4) \quad -[y' - Qy]' - Qy' = 0.$$

Тем самым, для любых двух точек непрерывности $a \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ и $b \in (a, 1 - \varepsilon)$ функции Q выполняются соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [y' - Qy]' y \, dx + \int_a^b Qy' y \, dx & [(4)] \\ &= [y' - Qy] y \Big|_a^b - \int_a^b (y')^2 \, dx + \int_a^b Q \cdot (y^2)' \, dx \\ &= \frac{(y^2)'}{2} \Big|_a^b - \int_a^b (y')^2 \, dx - \int_a^b y^2 \, dQ \\ &\leq \frac{(y^2)'}{2} \Big|_a^b, \end{aligned}$$

означающие неубывание функции $(y^2)'$ на некотором почти полном подмножестве интервала $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$. Обусловленная этим фактом вогнутость функции y^2 гарантирует справедливость равенства

$$\sup_{x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]} |y(x)| = \sup\{|y(\varepsilon)|, |y(1 - \varepsilon)|\},$$

с учётом выполнения вне отрезка $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ тривиальных неравенств $|y(x)| \leq \sqrt{\varepsilon} \|y'\|_{L_2[0,1]}$ автоматически означающего искомое. \square

В частности, при любом $\varepsilon \in (0, 1/2)$ всякая ε -сеть $L_2[0, 1]$ -образа единичного шара пространства $\dot{W}_2^1(\varepsilon^2, 1 - \varepsilon^2)$ будет являться 2ε -сетью $L_2[0, 1]$ -образа единичного шара пространства \mathfrak{D}_q . Это замечание означает полную непрерывность вложения $\mathfrak{D}_q \hookrightarrow L_2[0, 1]$.

2. Пространству \mathfrak{D}_q может быть сопоставлено сопряжённое гильбертово пространство \mathfrak{D}_q^* , а также линейный операторный пучок $T_q: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{D}_q, \mathfrak{D}_q^*)$ вида

$$(1) \quad \langle T_q(\lambda)y, z \rangle = \int_0^1 [y'z' - \lambda yz] \, dx + \langle q, yz \rangle.$$

Упомянутая ранее полная непрерывность вложения $\mathfrak{D}_q \hookrightarrow L_2[0, 1]$ гарантирует, что спектр пучка T_q допускает представление в виде последовательности сосчитанных с учётом кратности собственных значений

$$\lambda_0(q) \leq \lambda_1(q) \leq \dots \leq \lambda_n(q) \leq \dots$$

2.1. При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$ и потенциала $q \in \mathfrak{P}$ справедливо неравенство

$$\lambda_n(q) \leq 4\pi^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (1 + 2 \|q\|_2).$$

Доказательство. Независимо от выбора функции $y \in \mathring{W}_2^1(1/4, 3/4)$ и значения $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \langle T_q(\lambda)y, y \rangle &\leq \int_0^1 [(y')^2 - \lambda y^2] dx + \|q\|_2 \cdot \sqrt{\int_0^1 4y^2 \cdot (y')^2 dx} & [(1), 1(1)] \\ &\leq \int_0^1 [(1 + 2\|q\|_2) \cdot (y')^2 - \lambda y^2] dx. \end{aligned}$$

Соответственно, при всяком $\lambda > 4\pi^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (1 + 2\|q\|_2)$ заведомо найдётся $(n+1)$ -мерное подпространство $\mathfrak{M} \subseteq \mathring{W}_2^1(1/4, 3/4)$ со свойством

$$(\forall y \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}) \quad \langle T_q(\lambda)y, y \rangle < 0.$$

Согласно известным вариационным принципам для собственных значений самосопряжённых вполне непрерывных операторов [9: п. 95], это как раз и означает справедливость доказываемого предложения. \square

2.2. При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$ заданное на множестве \mathfrak{P} отображение $q \mapsto 1/\lambda_n(q)$ является равномерно непрерывным.

Доказательство. Согласно упомянутым вариационным принципам [9: п. 95], имеет место равенство

$$\frac{1}{\lambda_n(q)} = \inf_{\substack{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{D}_q \\ \text{codim } \mathfrak{M} \leq n}} \sup_{\substack{y \in \mathfrak{M} \\ \|y\|_{\mathfrak{D}_q} \leq 1}} \|y\|_{L_2[0,1]}^2.$$

Соответственно [1.1], при всех $\ell \geq 2$ справедливы оценки

$$(2) \quad \frac{1}{\lambda_n(q)} - 2^{-\ell} \leq \inf_{\substack{\mathfrak{M} \subseteq \mathring{W}_2^1(2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}) \\ \text{codim } \mathfrak{M} \leq n}} \sup_{\substack{y \in \mathfrak{M} \\ \|y\|_{\mathfrak{D}_q} \leq 1}} \|y\|_{L_2[0,1]}^2 \leq \frac{1}{\lambda_n(q)}.$$

Далее, для любых двух потенциалов $q_1, q_2 \in \mathfrak{P}$ и функции $y \in \mathring{W}_2^1(2^{-\ell}, 1-2^{-\ell})$ выполняются соотношения

$$\|y\|_{\mathfrak{D}_{q_1}}^2 = \|y\|_{\mathfrak{D}_{q_2}}^2 + \langle q_1 - q_2, y^2 \rangle \quad [1(2)]$$

$$\leq \|y\|_{\mathfrak{D}_{q_2}}^2 + \|q_1 - q_2\|_{\ell} \cdot \|2yy'\|_{L_2[0,1]} \quad [1(1)]$$

$$\leq \|y\|_{\mathfrak{D}_{q_2}}^2 + 2\|q_1 - q_2\|_{\ell} \cdot \|y'\|_{L_2[0,1]}^2$$

$$\leq (1 + 2\|q_1 - q_2\|_{\ell}) \cdot \|y\|_{\mathfrak{D}_{q_2}}^2. \quad [1(2)]$$

Отсюда и из (2) вытекает справедливость оценок

$$\frac{1}{\lambda_n(q_2)} - 2^{-\ell} \leq \frac{1 + 2\|q_1 - q_2\|_{\ell}}{\lambda_n(q_1)},$$

ввиду тривиального неравенства $\lambda_n(q_1) \geq \pi^2$ означающих, что при $\|q_1 - q_2\|_\ell < 2^{-\ell-1}\pi^2$ расстояние между величинами $1/\lambda_n(q_1)$ и $1/\lambda_n(q_2)$ мажорируется величиной $2^{-\ell+1}$. \square

3. Введём в рассмотрение функции

$$(1) \quad u_{q,n} = (y'_{q,n})^2 + \lambda_n(q)y_{q,n}^2,$$

где через $y_{q,n} \in \mathfrak{D}_q$ обозначены нормированные условием $\|y_{q,n}\|_{L_2[0,1]} = 1$ собственные функции пучка T_q , отвечающие собственным значениям $\lambda_n(q)$. Имеют место следующие четыре факта.

3.1. При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$, неотрицательного финитного потенциала $q \in C(0,1)$ и натурального значения $\ell \geq 2$ справедливо соотношение

$$(\forall x_1, x_2 \in [2^{-\ell}, 1 - 2^{-\ell}]) \quad \frac{u_{q,n}(x_1)}{u_{q,n}(x_2)} \leq \exp \left[2^{\ell/2} \|q\|_{\ell+1} \right].$$

Доказательство. Положим $\varepsilon = 2^{-\ell-1}$. Заметим, что соотношения

$$\begin{aligned} \left| [(y'_{q,n})^2 + \lambda_n(q)y_{q,n}^2]' \right| &= q \cdot |2y'_{q,n}y_{q,n}| & [\S 1.1 (1)] \\ &\leq \frac{q}{\sqrt{\lambda_n(q)}} \cdot [(y'_{q,n})^2 + \lambda_n(q)y_{q,n}^2] \end{aligned}$$

вместе с тривиальным неравенством $\lambda_n(q) \geq \pi^2$ немедленно влекут за собой оценки

$$(\forall x_1, x_2 \in [2\varepsilon, 1 - 2\varepsilon]) \quad \frac{u_{q,n}(x_1)}{u_{q,n}(x_2)} \leq \exp \left[\frac{\int_{2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} q \, dx}{\pi} \right].$$

Рассматривая функцию $w \in \mathring{W}_2^1(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ вида

$$w(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [2\varepsilon, 1 - 2\varepsilon], \\ (x - \varepsilon)/\varepsilon & \text{при } x \in [\varepsilon, 2\varepsilon], \\ (1 - x - \varepsilon)/\varepsilon & \text{при } x \in [1 - 2\varepsilon, 1 - \varepsilon], \end{cases}$$

убеждаемся также в справедливости оценок

$$\begin{aligned} \int_{2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} q \, dx &\leq \int_0^1 qw \, dx \\ &\leq \|q\|_{\ell+1} \cdot \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad [1 (1)]$$

Тем самым, доказываемое предложение является верным. \square

3.2. При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$, неотрицательного финитного потенциала $q \in C(0,1)$ и натурального значения $\ell > 4 + n + 2\|q\|_2$ справедливо соотношение

$$(\forall x \in [2^{-\ell}, 1 - 2^{-\ell}]) \quad u_{q,n}(x) \geq \lambda_n(q) \cdot \exp \left[-1 - 2^{\ell/2} \|q\|_{\ell+1} \right].$$

Доказательство. Положим $\varepsilon \Leftarrow 2^{-\ell}$. Характер выбора значения ℓ гарантирует [2.1] справедливость оценки $\lambda_n(q)\varepsilon^2 < 1/2$. Соответственно, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (\forall \zeta \in [0, 1]) \quad |y_{q,n}(\zeta)| &\leq \left| (1-\zeta) \cdot \int_0^\zeta y'_{q,n} dx - \zeta \cdot \int_\zeta^1 y'_{q,n} dx \right| \\ &\leq \sqrt{\zeta \cdot (1-\zeta)} \cdot \|y'_{q,n}\|_{L_2[0,1]} \\ (2) \quad &\leq \sqrt{\lambda_n(q) \cdot \zeta \cdot (1-\zeta)}, \end{aligned} \quad [2(1)]$$

$$\begin{aligned} (\forall \zeta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]) \quad \lambda_n(q) &= \int_0^1 \lambda_n(q) y_{q,n}^2 dx \\ &\leq \int_{[0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon,1]} \lambda_n(q) y_{q,n}^2 dx + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{q,n} dx \end{aligned} \quad [(1)]$$

$$\leq [\lambda_n(q)]^2 \varepsilon^2 + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{q,n} dx \quad [(2)]$$

$$(3) \quad \leq \frac{\lambda_n(q)}{2} + u_{q,n}(\zeta) \cdot \exp \left[2^{\ell/2} \|q\|_{\ell+1} \right], \quad [3.1]$$

$$(\forall \zeta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]) \quad u_{q,n}(\zeta) \geq \frac{\lambda_n(q)}{2} \cdot \exp \left[-2^{\ell/2} \|q\|_{\ell+1} \right]. \quad [(3)]$$

Тем самым, доказываемое предложение является верным. \square

3.3. При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$, неотрицательного финитного потенциала $q \in C(0, 1)$ и натурального значения $\ell > 4 + n + 2 \|q\|_2$ всякая точка $x \in [2^{-\ell+1}, 1 - 2^{-\ell+1}]$ со свойством

$$(4) \quad |y_{q,n}(x)| \leq 2^{-\ell} \cdot \exp \left[\frac{-1 - 2^{-\ell/2} \|q\|_{\ell+1}}{2} \right]$$

удалена от некоторого нуля функции $y_{q,n}$ не более, чем на $2^{-\ell}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $\Delta \subseteq [2^{-\ell}, 1 - 2^{-\ell}]$, на котором функция $y_{q,n}$ является знакоопределённой, и все точки которого обладают свойством (4). Тогда [3.2, (1)] функция $y'_{q,n}$ на отрезке Δ также является знакоопределённой, причём оценивается снизу по абсолютной величине постоянной

$$\frac{\sqrt{\lambda_n(q)}}{2} \cdot \exp \left[\frac{-1 - 2^{-\ell/2} \|q\|_{\ell+1}}{2} \right].$$

Это автоматически означает, что длина отрезка Δ не может превосходить величину $2^{-\ell+1} / \sqrt{\lambda_n(q)}$. Учёт тривиальной оценки $\lambda_n(q) \geq \pi^2$ завершает доказательство. \square

3.4. При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$, неотрицательного финитного потенциала $q \in C(0, 1)$ и натурального значения $\ell > 5 + n + 2 \|q\|_2$ справедливо неравенство

$$\lambda_{n+1}(q) - \lambda_n(q) \geq 2^{-\ell} \cdot \exp \left[-2^{-\ell/2} \|q\|_{\ell+1} \right].$$

Доказательство. Пусть a и $b > a$ — два нуля функции $y_{q,n}$. Соотношения

$$0 = \int_a^b \{-y''_{q,n} + [q - \lambda_n(q)]y_{q,n}\} \cdot y_{q,n} dx \quad [\S 1.1 (1)]$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_a^b [(y'_{q,n})^2 - \lambda_n(q)y_{q,n}^2] dx \\
&\geq \left[\frac{\pi^2}{(b-a)^2} - \lambda_n(q) \right] \cdot \int_a^b y_{q,n}^2 dx
\end{aligned}$$

означают, что расстояние между точками a и b не может быть меньше величины $\pi/\sqrt{\lambda_n(q)}$. Аналогичным образом, расстояние между двумя различными нулями функции $y_{q,n+1}$ не может быть меньше величины $\pi/\sqrt{\lambda_{n+1}(q)}$. Поскольку при этом число нулей функции $y_{q,n+1}$ превосходит таковое для функции $y_{q,n}$, то заведомо должен найтись нуль $\zeta \in (0, 1)$ функции $y_{q,n+1}$, удалённый от каждого из нулей функции $y_{q,n}$ более чем на $\pi/[3\sqrt{\lambda_{n+1}(q)}]$.

Далее, характер выбора значения ℓ гарантирует справедливость оценок

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{3\sqrt{\lambda_{n+1}(q)}} &\geq \frac{1}{6(n+2)\sqrt{1+2\|q\|_2}} \\
&> 2^{-\ell+1},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

а потому [3.3] и оценки

$$(5) \quad |y_{q,n}(\zeta)| \geq 2^{-\ell} \cdot \exp \left[\frac{-1 - 2^{-\ell/2} \|q\|_{\ell+1}}{2} \right].$$

Легко также усматривается [3.2, (1)] справедливость оценки

$$(6) \quad |y'_{q,n+1}(\zeta)| \geq \pi \cdot \exp \left[\frac{-1 - 2^{-\ell/2} \|q\|_{\ell+1}}{2} \right].$$

Тем самым, соотношения

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1}(q) - \lambda_n(q) &\geq \left| [\lambda_{n+1}(q) - \lambda_n(q)] \cdot \int_0^\zeta y_{q,n} y_{q,n+1} dx \right| \\
&= \left| (y'_{q,n} y_{q,n+1} - y_{q,n} y'_{q,n+1}) \Big|_0^\zeta \right| \\
&= |y_{q,n}(\zeta) y'_{q,n+1}(\zeta)|
\end{aligned} \tag{§ 1.1 (1)}$$

означают [(5), (6)] справедливость доказываемого предложения. \square

Установленные в настоящем пункте оценки собственных пар $\{\lambda_n(q), y_{q,n}\}$ являются довольно грубыми. Однако для достижения основных целей настоящей статьи они вполне достаточны. В частности, предложения 3.4 и 2.2 гарантируют простоту собственных значений $\lambda_n(q)$ при любом выборе потенциала $q \in \mathfrak{P}$.

4. Обозначим теперь через $\Gamma_{r,\gamma} \subseteq \mathfrak{P}$ замыкание множества $A_{r,\gamma}$ в пространстве $\overset{\circ}{W}_{2,loc}^{-1}(0, 1)$. Из предложения 2.2 немедленно вытекает справедливость равенства

$$M_{r,\gamma} = \sup_{q \in \Gamma_{r,\gamma}} \lambda_0(q).$$

4.1. При любом выборе значения $\gamma \geq 1$ множество $\Gamma_{r,\gamma}$ является компактным в пространстве $\mathring{W}_{2,loc}^{-1}(0,1)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом натуральное $\ell \geq 2$ и вещественное $\varepsilon > 0$, а также вещественное $\delta > 0$ со свойством

$$(1) \quad 2\delta \cdot \left(1 + \delta + \sup_{x \in [2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}]} r^{-1/\gamma}(x)\right) < \varepsilon.$$

Зададим на отрезке $[2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}]$ разбиение единицы $\{\chi_k\}_{k=1}^N$ индикаторами интервалов, обладающее следующими свойствами:

$$(2) \quad \text{При любом } k \in \overline{1, N} \text{ интервал с индикатором } \chi_k \text{ непуст, и его длина мажорируется величиной } \delta^2.$$

$$(3) \quad \text{Может быть указана линейная комбинация } g \text{ функций из набора } \{\chi_k\}_{k=1}^N, \text{ почти всюду на отрезке } [2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}] \text{ приближающая функцию } r^{-1/\gamma} \text{ с точностью } \delta.$$

Всякой функции $q \in A_{r,\gamma}$ может быть поставлена в соответствие функция

$$(4) \quad \tilde{q} = \sum_{k=1}^N \frac{\int_0^1 r^{1/\gamma} q \chi_k dx}{\int_0^1 \chi_k dx} \cdot r^{-1/\gamma} \chi_k,$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} \int_0^1 r \tilde{q}^\gamma dx &= \sum_{k=1}^N \frac{\left(\int_0^1 r^{1/\gamma} q \chi_k dx\right)^\gamma}{\left(\int_0^1 \chi_k dx\right)^\gamma} \cdot \int_0^1 \chi_k dx \\ &\leq \sum_{k=1}^N \frac{\left(\int_0^1 r q^\gamma \chi_k dx\right) \cdot \left(\int_0^1 \chi_k dx\right)^{\gamma-1}}{\left(\int_0^1 \chi_k dx\right)^{\gamma-1}} \\ (5) \quad &\leq 1, \end{aligned} \quad [\S 1.1 (3)]$$

$$(6) \quad (\forall k \in \overline{1, N}) \quad \int_0^1 r^{1/\gamma} \cdot (q - \tilde{q}) \chi_k dx = 0. \quad [(4)]$$

Сопоставив теперь произвольной функции $y \in \mathring{W}_2^1(2^{-\ell}, 1-2^{-\ell})$ линейную комбинацию \tilde{y} функций из набора $\{\chi_k\}_{k=1}^N$, почти всюду приближающую функцию y с точностью $\delta \|y'\|_{L_2[0,1]}$ [(2)], устанавливаем справедливость соотношений

$$\begin{aligned} \langle q - \tilde{q}, y \rangle &= \int_0^1 r^{1/\gamma} \cdot (q - \tilde{q}) \cdot (r^{-1/\gamma} - g) y dx + \int_0^1 r^{1/\gamma} \cdot (q - \tilde{q}) g y dx \\ &\leq 2\delta \|y'\|_{L_2[0,1]} + \int_0^1 r^{1/\gamma} \cdot (q - \tilde{q}) g y dx \quad [\S 1.1 (3), (5), (3)] \\ &= 2\delta \|y'\|_{L_2[0,1]} + \int_0^1 r^{1/\gamma} \cdot (q - \tilde{q}) g \cdot (y - \tilde{y}) dx \quad [(6)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\delta \|y'\|_{L_2[0,1]} + 2 \cdot \left(\delta + \sup_{x \in [2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}]} r^{-1/\gamma}(x) \right) \cdot \delta \|y'\|_{L_2[0,1]} \quad [\S 1.1 (3), (5), (3)] \\ &\leq \varepsilon \|y'\|_{L_2[0,1]}. \end{aligned} \quad [(1)]$$

Соответственно, всякая ε -сеть пересечения множества $A_{r,\gamma}$ с конечномерной линейной оболочкой набора $\{r^{-1/\gamma}\chi_k\}_{k=1}^N$ относительно полунормы 1 (1) является 2ε -сетью множества $A_{r,\gamma}$ относительно той же полунормы. \square

5. Через $B_{r,\gamma,\delta}$ мы далее будем обозначать множество финитных непрерывных потенциалов $q \in A_{r,\gamma}$, подчиняющихся оценке $\lambda_0(q) \geq \pi^2 + \delta$.

5.1. При любом выборе значения $\gamma > 1$ может быть указана величина $\delta > 0$ со свойством $B_{r,\gamma,\delta} \neq \emptyset$.

Доказательство. Зафиксируем финитный непрерывный потенциал $q \in A_{r,\gamma}$, не равный нулю как элемент пространства $L_1[0, 1]$. Отвечающая ему собственная функция $y_{q,0} \in \mathfrak{D}_q$ не является собственной функцией пучка T_0 , а потому удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \langle T_q(\pi^2)y_{q,0}, y_{q,0} \rangle &= \int_0^1 [(y'_{q,0})^2 + (q - \pi^2)y_{q,0}^2] dx \quad [2 (1)] \\ &\geq \int_0^1 [(y'_{q,0})^2 - \pi^2 y_{q,0}^2] dx \\ &> 0. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно вытекает справедливость неравенства $\lambda_0(q) > \pi^2$, а тогда и существование величины $\delta > 0$ со свойством $q \in B_{r,\gamma,\delta}$. \square

5.2. При любом выборе значений $\gamma > 1$ и $\delta > 0$ может быть указана постоянная $\varkappa > 0$, независимо от выбора потенциала $q \in B_{r,\gamma,\delta}$ удовлетворяющая неравенству

$$\int_0^1 (q - \varkappa) \cdot y_{q,0}^2 dx \geq 0.$$

Доказательство. Зафиксируем параметризованное значениями $\varepsilon \in (0, 1/8)$ семейство функций $w_\varepsilon \in \mathring{W}_2^1(0, 1)$ вида

$$(1) \quad w_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [\varepsilon, 1 - \varepsilon], \\ \cos \frac{\pi \cdot (x - 1/2)}{1 - 2\varepsilon} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положив

$$(2) \quad \Theta = 4\pi^2 \cdot \left(1 + 2 \sup_{q \in \Gamma_{r,\gamma}} \|q\|_2 \right), \quad [4.1]$$

устанавливаем при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерные по $q \in B_{r,\gamma,\delta}$ оценки

$$\langle qw_\varepsilon, w_\varepsilon \rangle = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} r q \cdot \frac{w_\varepsilon^2}{r} dx$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left[\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} r \cdot \left(\frac{w_{\varepsilon}^2}{r} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} dx \right]^{(\gamma-1)/\gamma} \quad [\S 1.1 (3)] \\
& \leq \left[\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} r^{-1/(\gamma-1)} dx \right]^{(\gamma-1)/\gamma} \quad [(1)] \\
(3) \quad & \leq \sup_{x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} r^{-1/\gamma}(x), \\
& \int_0^1 |y_{q,0}| w_{\varepsilon} dx \geq \int_{\varepsilon^{1/3}}^{1-\varepsilon^{1/3}} |y_{q,0}| w_{\varepsilon} dx \\
& \geq \inf_{x \in [\varepsilon^{1/3}, 1-\varepsilon^{1/3}]} \frac{w_{\varepsilon}(x)}{|y_{q,0}(x)|} \cdot \int_{\varepsilon^{1/3}}^{1-\varepsilon^{1/3}} y_{q,0}^2 dx \\
& \geq \frac{\pi \cdot (\varepsilon^{1/3} - \varepsilon)}{(1-2\varepsilon) \cdot \sqrt{\Theta}} \cdot [1 - \Theta \varepsilon^{2/3}] \quad [2.1, (1), 3 (2), (2)] \\
(4) \quad & \geq \frac{\pi \varepsilon^{1/3}}{\sqrt{\Theta}} \cdot [1 + o(1)], \\
& \sqrt{\langle q y_{q,0}, y_{q,0} \rangle} \geq \frac{\langle q |y_{q,0}|, w_{\varepsilon} \rangle}{\sqrt{\langle q w_{\varepsilon}, w_{\varepsilon} \rangle}} \\
& = \frac{\langle |y_{q,0}|'' + \lambda_0(q) |y_{q,0}|, w_{\varepsilon} \rangle}{\sqrt{\langle q w_{\varepsilon}, w_{\varepsilon} \rangle}} \quad [\S 1.1 (1)] \\
& = \frac{\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} |y_{q,0}| \cdot [w_{\varepsilon}'' + \lambda_0(q) w_{\varepsilon}] dx - (|y_{q,0}| w_{\varepsilon}') \Big|_{\varepsilon+0}^{1-\varepsilon-0}}{\sqrt{\langle q w_{\varepsilon}, w_{\varepsilon} \rangle}} \\
& \geq \frac{[\delta + o(1)] \cdot \int_0^1 |y_{q,0}| w_{\varepsilon} dx + O(\varepsilon^{1/2})}{\sqrt{\langle q w_{\varepsilon}, w_{\varepsilon} \rangle}} \quad [(1), 3 (2)] \\
& \geq \frac{\pi \delta \varepsilon^{1/3}}{\sqrt{\Theta}} \cdot \inf_{x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} r^{1/2\gamma}(x) \cdot [1 + o(1)]. \quad [(4), (3)]
\end{aligned}$$

Из последней оценки фиксацией достаточно малого значения $\varepsilon > 0$ получается искомое. \square

5.3. При любом выборе значений $\gamma > 1$, $\delta > 0$ и функции $q \in B_{r,\gamma,\delta}$ справедлива оценка

$$M_{r,\gamma} \geq \lambda_0(q) + \varkappa \cdot \left(1 - \left[\int_0^1 r q^{\gamma} dx \right]^{1/\gamma} \right),$$

где коэффициент $\varkappa > 0$ определён предложением 5.2.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t \geq 1$ со свойством $tq \in B_{r,\gamma,\delta}$. Соотношения

$$\begin{aligned}
0 & \leq \langle T_q(\lambda_0(q)) y_{tq,0}, y_{tq,0} \rangle \\
& = \langle T_{tq}(\lambda_0(tq)) y_{tq,0}, y_{tq,0} \rangle + \int_0^1 [(t^{-1} - 1) \cdot tq + (\lambda_0(tq) - \lambda_0(q))] \cdot y_{tq,0}^2 dx \quad [2 (1)]
\end{aligned}$$

$$\leq \varkappa \cdot (t^{-1} - 1) + (M_{r,\gamma} - \lambda_0(q)) \quad [5.2]$$

означают справедливость оценки $M_{r,\gamma} \geq \lambda_0(q) + \varkappa \cdot (1 - t^{-1})$. Последняя, в свою очередь, немедленно влечёт искомое. \square

§ 3. Основные результаты

1. Рассмотрим сначала случай $\gamma > 1$. Здесь, согласно § 2.4.1, § 2.2.2, § 2.5.1 и § 2.2.1, при некотором $\delta > 0$ может быть указана последовательность $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ потенциалов класса $B_{r,\gamma,\delta}$ со свойством $\lambda_0(q_n) \rightarrow M_{r,\gamma}$. При этом, очевидно, можно без ограничения общности считать выполненным тождество

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \int_0^1 r q_n^\gamma dx = 1.$$

Рассмотрим теперь двойную последовательность $\{q_{n,m}\}_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ потенциалов вида

$$(1) \quad q_{n,m} = \frac{q_n + q_m}{2}.$$

Поскольку отображение $\lambda_0: L_1[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, согласно вариационным принципам, является выпуклым, то все потенциалы $q_{n,m}$ принадлежат классу $B_{r,\gamma,\delta}$, причём нижний предел числовой двойной последовательности $\{\lambda_0(q_{n,m})\}_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ не может оказаться меньшим, нежели $M_{r,\gamma}$. Это автоматически означает справедливость равенства

$$(2) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \lambda_0(q_{n,m}) = M_{r,\gamma},$$

а тогда, согласно предложению § 2.5.3, и равенства

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \int_0^1 r q_{n,m}^\gamma dx = 1.$$

Известный [9: п. 145] факт равномерной выпуклости весового пространства $L_\gamma(r; [0,1])$ означает потому фундаментальность последовательности $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ в этом пространстве. Соответственно [§ 2.4.1, § 2.2.2], справедливо следующее предложение:

1.1. *При всяком $\gamma > 1$ существует и однозначно определён потенциал $\hat{q} \in A_{r,\gamma}$, удовлетворяющий равенству $\lambda_0(\hat{q}) = M_{r,\gamma}$.*

Зафиксируем теперь произвольным образом неотрицательную финитную функцию $p \in C(0,1)$, а также величину

$$(3) \quad \alpha > \int_0^1 r p \hat{q}^{\gamma-1} dx - 1.$$

При любом $\varepsilon \in [0,1)$ отвечающее потенциалу

$$q_\varepsilon = \frac{(1-\varepsilon)\hat{q} + \varepsilon p}{1 + \alpha\varepsilon}$$

пространство $\mathfrak{D}_{q_\varepsilon}$ совпадает, с точностью до выбора эквивалентной нормы, с пространством $\mathfrak{D}_{\hat{q}}$. Применим теперь к параметрическому семейству пучков $T_{q_\varepsilon}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{D}_{\hat{q}}, \mathfrak{D}_{\hat{q}}^*)$ известные результаты [9: п.136] о поведении простых собственных значений при аналитических возмущениях. Согласно последним, при $\varepsilon \rightarrow +0$ должна быть справедлива асимптотика

$$\lambda_0(q_\varepsilon) = M_{r,\gamma} + \varepsilon \cdot \int_0^1 [p - (\alpha + 1)\hat{q}] \cdot y_{\hat{q}}^2 dx + o(\varepsilon),$$

где через $y_{\hat{q}} \in \mathfrak{D}_{\hat{q}}$ обозначена нормированная условием $\|y_{\hat{q}}\|_{L_2[0,1]} = 1$ собственная функция пучка $T_{\hat{q}}$, отвечающая собственному значению $M_{r,\gamma}$. Поскольку при всех достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение $q_\varepsilon \in A_{r,\gamma}$ [(3), § 1.1 (3)], это, ввиду произвольности выбора параметра α со свойством (3), приводит к оценке

$$\int_0^1 rp \cdot \left[\frac{y_{\hat{q}}^2}{r} - \left(\int_0^1 \hat{q} y_{\hat{q}}^2 dx \right) \cdot \hat{q}^{\gamma-1} \right] dx \leq 0.$$

Последняя, ввиду произвольности выбора функции p , означает справедливость неравенств

$$(4) \quad \frac{y_{\hat{q}}^2(x)}{r(x)} \leq \left(\int_0^1 \hat{q} y_{\hat{q}}^2 dx \right) \cdot \hat{q}^{\gamma-1}(x) \quad \text{при почти всех } x \in (0, 1).$$

С другой стороны, всякий потенциал $\hat{q} \in A_{r,\gamma}$ со свойством (4) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} M_{r,\gamma} - \lambda_0(\hat{q}) &\leq \sup_{q \in B_{r,\gamma,0}} \left(\int_0^1 [\lambda_0(q) - \lambda_0(\hat{q})] y_{\hat{q}}^2 dx + \langle T_q(\lambda_0(q)) y_{\hat{q}}, y_{\hat{q}} \rangle \right) \\ &= \sup_{q \in B_{r,\gamma,0}} \int_0^1 [(y'_{\hat{q}})^2 + (q - \lambda_0(\hat{q})) y_{\hat{q}}^2] dx \quad [\S 2.2 (1)] \\ &\leq \int_0^1 [(y'_{\hat{q}})^2 - \lambda_0(\hat{q}) y_{\hat{q}}^2] dx + \left[\int_0^1 r \cdot \left(\frac{y_{\hat{q}}^2}{r} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} dx \right]^{(\gamma-1)/\gamma} \quad [\S 1.1 (3)] \\ (5) \quad &\leq \int_0^1 [(y'_{\hat{q}})^2 - \lambda_0(\hat{q}) y_{\hat{q}}^2] dx + \int_0^1 \hat{q} y_{\hat{q}}^2 dx \quad [(4), \S 1.1 (3)] \\ &= \langle T_{\hat{q}}(\lambda_0(\hat{q})) y_{\hat{q}}, y_{\hat{q}} \rangle \quad [\S 2.2 (1)] \\ (6) \quad &= 0, \end{aligned}$$

что означает выполнение равенства $\lambda_0(\hat{q}) = M_{r,\gamma}$. При этом все неравенства внутри последней выкладки вырождаются в равенства, а потому [(5), § 1.1 (3)] равенствами оказываются также и неравенства (4). Соответственно, справедливо следующее предложение:

1.2. Потенциал $\hat{q} \in A_{r,\gamma}$ со свойством $\lambda_0(\hat{q}) = M_{r,\gamma}$ характеризуется условием

$$\hat{q} = \frac{r^{1/(1-\gamma)} y_{\hat{q}}^{2/(\gamma-1)}}{\left(\int_0^1 r^{1/(1-\gamma)} y_{\hat{q}}^{2\gamma/(\gamma-1)} dx \right)^{1/\gamma}}.$$

2. Перейдём теперь к рассмотрению случая $\gamma = 1$. Как и в предыдущем случае, предложения § 2.4.1, § 2.2.2 и § 2.2.1 гарантируют существование последовательности $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ потенциалов класса $B_{r,1,0}$, обладающей свойством $\lambda_0(q_n) \rightarrow M_{r,1}$. Обозначим через y_n нормированные условием $\|y_n\|_{L_2[0,1]} = 1$ неотрицательные собственные функции пучков T_{q_n} . Заметим, что при любых значениях $n, m \in \mathbb{N}$ нормированная условием $\|y_{n,m}\|_{L_2[0,1]} = 1$ неотрицательная собственная функция пучка $T_{q_{n,m}}$, отвечающего потенциалу 1 (1), удовлетворяет хотя бы одному из неравенств

$$(1) \quad \begin{aligned} \|y_{n,m} - y_n\|_{L_2[0,1]} &> \frac{\|y_n - y_m\|_{L_2[0,1]}}{3}, \\ \|y_{n,m} - y_m\|_{L_2[0,1]} &> \frac{\|y_n - y_m\|_{L_2[0,1]}}{3}. \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно предположить выполнение первого из них. При этом с очевидностью справедливо также неравенство

$$(2) \quad \|y_{n,m} + y_n\|_{L_2[0,1]} \geq \|y_{n,m} - y_n\|_{L_2[0,1]}.$$

Зафиксировав теперь не зависящую от выбора значений $n, m \in \mathbb{N}$ величину $\eta > 0$ достаточно малой и раскладывая функцию $y_{n,m}$ в пространстве \mathfrak{D}_{q_n} по собственным функциям пучка T_{q_n} , убеждаемся в справедливости соотношений

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_0^1 [(y'_{n,m})^2 + q_n y_{n,m}^2] dx &\geq \lambda_0(q_n) \cdot \left(\int_0^1 y_{n,m} y_n dx \right)^2 + \\ &\quad + \lambda_1(q_n) \cdot \left[1 - \left(\int_0^1 y_{n,m} y_n dx \right)^2 \right] \\ &\geq \lambda_0(q_n) + \eta \|y_n - y_m\|_{L_2[0,1]}^2, \quad [(1), (2), \S 2.4.1, \S 2.3.4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0(q_{n,m}) &= \int_0^1 [(y'_{n,m})^2 + q_{n,m} y_{n,m}^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 [(y'_{n,m})^2 + q_n y_{n,m}^2] dx + \int_0^1 [(y'_{n,m})^2 + q_m y_{n,m}^2] dx \right) \quad [1 (1)] \\ &\geq \frac{\lambda_0(q_n) + \lambda_0(q_m)}{2} + \eta \|y_n - y_m\|_{L_2[0,1]}^2. \quad [(3)] \end{aligned}$$

С учётом справедливости, как и для случая $\gamma > 1$, равенства 1 (2), последние оценки означают фундаментальность функциональной последовательности $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0, 1]$. Следовательно, на плотном подмножестве $C_0^2(0, 1) \subset \mathring{W}_2^1(0, 1)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (\forall \varphi \in C_0^2(0, 1)) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \int_0^1 (y'_n - y'_m) \cdot \varphi' dx &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \int_0^1 (y_m - y_n) \cdot \varphi'' dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

ввиду справедливости оценок $\|y'_n\|_{L_2[0,1]} \leq \sqrt{M_{r,1}}$ гарантирующие слабую фундаментальность последовательности $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $\mathring{W}_2^1(0, 1)$. Полная непрерывность

вложения $\overset{\circ}{W}_2^1(0,1) \hookrightarrow C[0,1]$ означает при этом сильную фундаментальность последовательности $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ в пространстве $C[0,1]$. Непрерывность линейной биекции $y \mapsto y''$ пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(0,1)$ на пространство $\overset{\circ}{W}_2^{-1}(0,1)$ означает также слабую фундаментальность последовательности функций $q_n y_n = y_n'' + \lambda_0(q_n) y_n$ в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^{-1}(0,1)$.

Зафиксируем теперь произвольное натуральное $\ell \geq 2$ и положим $\varepsilon = 2^{-\ell}$. Выполнение [§ 1.1 (3)] при любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$ и функции $z \in \overset{\circ}{W}_2^1(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ неравенства

$$(4) \quad \left| \int_0^1 q_n y_n z \, dx \right| \leq L \cdot \|z\|_{C[0,1]},$$

где положено

$$L > \sqrt{M_{r,1}} \cdot \sup_{x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} r^{-1}(x),$$

вместе с вполне непрерывным характером вложения $\overset{\circ}{W}_2^1(\varepsilon, 1-\varepsilon) \hookrightarrow C[0,1]$ означают фундаментальность последовательности $\{q_n y_n\}_{n=0}^\infty$ относительно полунормы § 2.1 (1). Зафиксировав теперь не зависящую от выбора значений $n, m \in \mathbb{N}$ величину $\theta > 0$ достаточно малой, убеждаемся в выполнении при любом выборе функции $z \in \overset{\circ}{W}_2^1(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ соотношений

$$\begin{aligned} \langle q_n - q_m, z \rangle &= \int_0^1 [q_n y_n - q_m y_m] \cdot \frac{z}{y_m} \, dx + \int_0^1 q_n y_n \cdot \frac{y_m - y_n}{y_n y_m} \cdot z \, dx \\ &\leq \|q_n y_n - q_m y_m\|_\ell \cdot \left\| \frac{z' y_m - z y_m'}{y_m^2} \right\|_{L_2[0,1]} + \\ &\quad + L \cdot \|z'\|_{L_2[0,1]} \cdot \sup_{x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} \frac{y_m(x) - y_n(x)}{y_n(x) y_m(x)} \quad [\S 2.1 (1), (4)] \\ &\leq \left(\|q_n y_n - q_m y_m\|_\ell \cdot \frac{\theta + \sqrt{M_{r,1}}}{\theta^2} + \right. \\ &\quad \left. + L \theta^{-2} \cdot \|y_n - y_m\|_{C[0,1]} \right) \cdot \|z'\|_{L_2[0,1]}. \quad [\S 2.4.1, \S 2.3.3] \end{aligned}$$

Тем самым, последовательность $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ фундаментальна относительно полунормы § 2.1 (1). Соответственно [§ 2.2.2], справедливо следующее предложение:

2.1. *Существует и однозначно определён потенциал $\hat{q} \in \Gamma_{r,1}$, удовлетворяющий равенству $\lambda_0(\hat{q}) = M_{r,1}$.*

Зафиксируем теперь произвольным образом функцию $p \in B_{r,1,0}$ и рассмотрим параметризованное значениями $\varepsilon \in [0,1)$ семейство пучков $T_{q_\varepsilon}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{D}_{\hat{q}}, \mathfrak{D}_{\hat{q}}^*)$, отвечающих потенциалам $q_\varepsilon = (1-\varepsilon)\hat{q} + \varepsilon p$. Для него при $\varepsilon \rightarrow +0$ справедлива асимптотика

$$\lambda_0(q_\varepsilon) = M_{r,1} + \varepsilon \cdot \langle p - \hat{q}, y_{\hat{q}}^2 \rangle + o(\varepsilon),$$

где через $y_{\hat{q}} \in \mathfrak{D}_{\hat{q}}$ обозначена нормированная условием $\|y_{\hat{q}}\|_{L_2[0,1]} = 1$ собственная функция пучка $T_{\hat{q}}$, отвечающая собственному значению $M_{r,1}$. Это автоматически означает справедливость неравенства

$$\int_0^1 r p \cdot \frac{y_{\hat{q}}^2}{r} \, dx \leq \langle \hat{q}, y_{\hat{q}}^2 \rangle,$$

а тогда, ввиду произвольности выбора функции p , и неравенства

$$(5) \quad \sup_{x \in (0,1)} \frac{y_{\hat{q}}^2(x)}{r(x)} \leq \langle \hat{q}, y_{\hat{q}}^2 \rangle.$$

Повторяя теперь рассуждения, проведённые ранее при получении оценок 1 (6), устанавливаем, что всякий потенциал $\hat{q} \in \Gamma_{r,1}$ со свойством (5) удовлетворяет соотношению $\lambda_0(\hat{q}) = M_{r,1}$, причём само неравенство (5) вырождается в равенство. Соответственно, справедливо следующее предложение:

2.2. Потенциал $\hat{q} \in \Gamma_{r,1}$ со свойством $\lambda_0(\hat{q}) = M_{r,1}$ характеризуется условием

$$(6) \quad \sup_{x \in (0,1)} \frac{y_{\hat{q}}^2(x)}{r(x)} = \langle \hat{q}, y_{\hat{q}}^2 \rangle.$$

Соотношения $\hat{q} \in \Gamma_{r,1}$ и (6) означают, что функция $r^{-1}y_{\hat{q}}^2$ принимает своё максимальное значение почти всюду по мере \hat{q} . Тем самым, имеет место следующий факт:

2.3. Никакая точка $\zeta \in (0,1)$ со свойством

$$\frac{y_{\hat{q}}^2(\zeta)}{r(\zeta)} < \sup_{x \in (0,1)} \frac{y_{\hat{q}}^2(x)}{r(x)}$$

не принадлежит носителю меры \hat{q} .

3. Отметим, что доказательство предложения 2.1 практически без изменений переносится на случай, когда вместо класса $A_{r,1}$ рассматривается его выпуклое подмножество (ср., например, [1: Теорема 1]). Обсуждение возможных дальнейших обобщений полученных результатов мы оставляем за рамками настоящей статьи.

Литература

- [1] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля // Успехи матем. наук. — 1984. — Т. 39, № 2. — С. 151–152.
- [2] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала // Доклады Акад. Наук. — 2003. — Т. 392, № 5. — С. 592–597.
- [3] С. С. Ежак. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле / В кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 517–559.
- [4] М. Ю. Тельнова. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием / В кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 608–647.
- [5] М. Ю. Тельнова. Об одной оценке сверху первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Международная миниконференция «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения» (22 июня и 19 декабря 2013 г., 24 мая 2014 г.). Сборник трудов. М.: 2014. С. 126–140.
- [6] А. А. Марков. О конструктивной математике // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. — 1962. — Т. 67. — С. 8–14.
- [7] E. S. Karulina, A. A. Vladimirov. The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extremum of the first eigenvalue // Tatra Mountains Math. Publications. — 2013. — V. 54. — P. 101–118.
- [8] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 723–733.
- [9] Ф. Русс, Б. Сёкефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу, изд. 2. М.: Мир, 1979.